РОЗДІЛ 7. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МІЖГАЛУЗЕВОЇ ЕКОНОМІКИ ТИПУ КАНТОРОВИЧА

MODELING OF OPTIMAL DEVELOPMENT OF A GENERAL DYNAMIC INTERINDUSTRY ECONOMY OF THE KANTOROVICH TYPE

УДК 330.101: 519.866

Бойчук М.В.
к.ф.-м.н., доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича
Маханець Л.Л.
к.е.н., доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича

У статті показано, що актуальним є дослідження систем і процесів, за яких процеси здійснення затрат і випуску продукції проходять одночасно. Запропонована модель оптимального розвитку узагальненої динамічної міжгалузевої економіки типу Канторовича та проведено її дослідження. Для дослідження оптимальних динамічних систем із узагальненим міжгалузевим балансом типу Канторовича використовуються достатні умови оптимальності. Встановлюється обмеження на інвестування між галузями. Воно відсутнє, галузь сама себе інвестує. У роботі сформульовані припущення для побудови економіко-математичної моделі узагальненої динамічної міжгалузевої економіки типу Канторовича. Побудована у роботі модель є задачею оптимального керування, в якій керуваннями виступають валові інвестиції, споживання, робоча сила (жива праця) і рівень діяльності, а фазовою траєкторією – капітал. Запропонована методика може використовуватися для критерію мети в умовах удосконаленої конкуренції та в умовах міжгалузевого інвестування галузей.

Ключові слова: *узагальнена міжгалузева економіка, модель типу Канторовича, оптимальний процес, задача оптимального керування, числові методи.*

В работе показано, что актуальным является исследование систем и процессов, при которых процессы осуществления затрат и выпуска продукции проходят одновременно. Предложена модель оптимального развития обобщенной динамической межотраслевой экономики типа Канторовича и проведено ее исследование. Для исследования оптимальных динамических систем с обобщенным межотраслевым балансом типа Канторовича используются достаточные условия оптимальности. В модели используются ограничения на инвестирование между отраслями. Оно отсутствует, отрасль сама себя инвестирует. В работе сформулированы предположения для построения экономико-математической модели обобщенной динамической межотраслевой экономики типа Канторовича. Построенная в работе модель является задачей оптимального управления, в которой управлениям выступают валовые инвестиции, потребление, рабочая сила (живой труд) и уровень деятельности, а фазовой траекторией – капитал. Предложенная методика может использоваться для критерия цели в условиях усовершенствованной конкуренции и в условиях межотраслевого инвестирования отраслей.

Ключевые слова: *обобщенная межотраслевая экономика, модель типа Канторовича, оптимальный процесс, задача оптимального управления, численные методы.*

It is shown that the study of systems and processes under which cost and product output take place at the same time are issues of the day. Sufficient optimality conditions are used to study optimal dynamic systems with a generalized interindustry balance of the Kantorovich type. A model of the optimal development of a generalized dynamic interdisciplinary economy of the Kantorovich type was investigated in the paper. The model uses restrictions on investment between sectors. It is absent, the industry invests itself. The assumptions for the construction of an economic-mathematical model of a generalized dynamic interindustry economy of the Kantorovich type are formulated in the paper. Assumptions for the model are as follows. There is certain number of types of products in the economy. Costs and output occur simultaneously. The part of the variable final demand vector is the sum of unproductive consumption and gross investment. The dynamics of capital flows is described by a differential model. The level of activity is a macroeconomic function of capital and labor. This function is twice continuously differentiated and monotonically increased. The target criterion is maximization of the average of the variable component of the final demand (output). The model of optimal development of a generalized dynamic interindustry economy of the Kantorovich type is constructed in this article. In mathematical terms, this model is the task of optimal control, in which the control is gross investment, consumption, labor and level of activity, and the phase trajectory is capital. The task, which is formulated in the article, is the task of convex programming, which, in the absence of certain constraints, has a solution by the Kuhn-Tucker theorem. This solution will be the optimal controls: for gross investment, for consumption, for living labor. Solving the problem of convex programming can be one of the numerical methods. The proper optimal trajectories for capital are determined by the Runge-Kutta method. This approach can be used for the target criterion in conditions of improved competition and in conditions of interindustry investment.

Key words: *generalized intersectoral economy, model of Kantorovich type, optimal process, optimal control problem, numerical methods.*

Постановка проблеми. В узагальненій моделі Леонтьєва є можливість розглядати проблему технологічного вибору в умовах використання обмежених ресурсів. При цьому повинна використовуватися умова відсутності сумісного виробництва благ, результатом якої є технологічний прогрес випуску тільки одного виду благ [1, с. 239–242]. Зауважене обмеження можна ослабити. Тому актуальним є дослідження систем і процесів, за яких процеси здійснення затрат і випуску продукції проходять одночасно.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нині дослідження оптимальних динамічних систем проводиться у двох напрямах.

До *першого* належать роботи [2, 3] та інші, в яких для дослідження оптимальних динамічних систем використовуються необхідні умови оптимальності – принцип Понтрягіна.

До *другого* напряму належать роботи [4,; 5] та інші, в яких для дослідження використовуються достатні умови оптимальності.

У цій статті для дослідження оптимальних динамічних систем із узагальненим міжгалузевим балансом типу Канторовича використовуються достатні умови оптимальності.

Постановка завдання. Запропонувати модель оптимального розвитку узагальненої динамічної міжгалузевої економіки типу Канторовича та провести її дослідження. При цьому інвестування між галузями відсутнє – галузь сама себе інвестує.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Економіко-математична модель

Сформулюємо припущення для побудови економіко-математичної моделі.

Припущення 1. Будемо вважати, що в економіці випускається m видів продукції $Y(t)=\left(Y_1(t),\ldots,Y_m(t)\right)'$, $t\in[t_0,T]$, $'$ – операція транспонування матриць. Позначимо через $A=\left(a_{ij}^{(l)}\right)$, $l=\overline{1,\nu(i)}$, $j=\overline{1,m}$ технологічну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} \text{галузь } 1 & \text{галузь } 2 & & \text{галузь } m \\ a_{11}^{(1)}\ldots a_{11}^{(\nu(1))} & a_{12}^{(1)}\ldots a_{12}^{(\nu(2))} & \ldots & a_{1m}^{(1)}\ldots a_{1m}^{(\nu(m))} \\ a_{21}^{(1)}\ldots a_{21}^{(\nu(1))} & a_{22}^{(1)}\ldots a_{22}^{(\nu(2))} & \ldots & a_{2m}^{(1)}\ldots a_{2m}^{(\nu(m))} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(1)}\ldots a_{m1}^{(\nu(1))} & a_{m1}^{(1)}\ldots a_{m2}^{(\nu(2))} & \ldots & a_{mm}^{(1)}\ldots a_{mm}^{(\nu(m))} \end{pmatrix},$$

а рівень діяльності – $X_{(t)}=\left(X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(\nu(1))},X_2^{(1)},\ldots,X_2^{(\nu(2))},\ldots,X_m^{(1)},\ldots,X_m^{(\nu(m))}\right)'$.

Вибір технологій проводиться із матричної рівності

$$Y(t)=AX(t),\ t\in[t_0,T]. \tag{1}$$

Припущення 2. Вважається, що затрати і випуск відбуваються одночасно. Тоді можна вектор кінцевого попиту Y представити двома складовими векторами: постійним (заданим) вектором $Y^{(\text{ПО})}(t)$ та змінним вектором $\alpha Z(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$:

$$Y(t)=Y^{\text{ПО}}(t),\ t\in[t_0,T], \tag{2}$$

де $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)'$, а Z – шукана функція.

Припущення 3. Частину змінного вектора кінцевого попиту Z представимо сумою невиробничого споживання C і валових інвестицій I [6, с. 28–29].

$$Z(t)=C(t)+I(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}]. \tag{3}$$

Припущення 4. Динаміка руху капіталів $K_i^{(j)}$ описується диференціальною моделлю

$$\dot K_i^{(j)}(t)=-\mu_i^{(j)}K_i^{(j)}(t)+\alpha_i I(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$
$$K_i^{(j)}(t_0)=K_{i0}^{(j)},\ j=\overline{1,\nu(i)},\ i=\overline{1,m}, \tag{4}$$

де $\mu_i^{(j)}\in(0,1)$ – норма амортизації капіталу $K_i^{(j)}$, $\dot K_i^{(j)}(t)\equiv dK_i^{(j)}(t)/dt$.

Припущення 5. Рівень діяльності $\mathrm{X}_i^{(j)}$ є макроекономічною функцією $F_i^{(j)}\left(K_i^{(j)},L_i^{(j)}\right)$ капіталу $\mathrm{K}_i^{(j)}$ та робочої сили (живої праці) $L_i^{(j)}$

$$\mathrm{X}_i^{(j)}(t)=F_i^{(j)}\left(K_i^{(j)}(t),L_i^{(j)}(t)\right),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

а на робочу силу накладається обмеження

$$0\le L_i^{(j)}(t),\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu(i)}L_i^{(j)}(t)\le Q,\ t\in[t_0,\mathrm{T}]. \tag{5}$$

Макровиробничі функції $F_i^{(j)}\left(K_i^{(j)},L_i^{(j)}\right)\ge 0$ – двічі неперервно диференційовані, монотонно зростаючі, вгнуті по $K_i^{(j)}\ge 0$ та $L_i^{(j)}\ge 0$.

Припущення 6. За критерій мети візьмемо максимізацію середньої (інтегральної) на часовому відрізку $[t_0,\mathrm{T}]$ змінногор складника кінцевого попиту (випуску)

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}}Z_{(t)}dt=\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{I}_{(t)}+C_{(t)}\right]dt\to\max. \tag{6}$$

Із використанням співвідношень (1) – (6) запишемо математичну модель

$$\begin{gathered}
\dot K_i^{(j)}(t)=-\mu_i^{(j)}K_i^{(j)}(t)+\alpha_i I(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\\
K_i^{(j)}(t_0)=K_{i0}^{(j)},\\
\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu(j)}a_{ij}^{(l)}F_j^{(l)}\left(K_j^{(l)}(t),L_j^{(l)}(t)\right)-\alpha_i\left(I(t)+C(t)\right)=Y_i^{(\text{ПО})}(t),\\
i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\\
0\le L_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\nu(i)},\ i=\overline{1,m},\\
C_i(t)\ge C_i^{(\min)},\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_{(i)}}L_i^{(j)}(t)\le Q,\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\\
K_i^{(j)}(\mathrm{T})\ge K_{iT}^{(j)},\ j=\overline{1,\nu(i)},\ i=\overline{1,m},\\
\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\left[I_{(t)}+C_{(t)}\right]dt\to\max.
\end{gathered}$$

У моделі (7) на споживання накладається обмеження $C_i\ge C_i^{(\min)}$ $i=\overline{1,m}$, а також на кінцевий стан капіталу $K_i^{(j)}(\mathrm{T})\ge K_{iT}^{(j)}$, $j=\overline{1,\nu(i)}$, $i=\overline{1,m}$.

Модель (7) у математичному плані є задачею оптимального керування, в якій керуваннями виступають валові інвестиції I, споживання C, робоча сила (жива праця) $L=\left(L_1^{(1)},\ldots,L_1^{\nu(1)},\ldots,L_m^{(1)},\ldots,L_m^{\nu(m)}\right)'$, і рівень діяльності $X=\left(X_1^{(1)},\ldots,X_1^{\nu(1)},\ldots,X_m^{(1)},\ldots,X_m^{\nu(m)}\right)'$, а фазовою траєкторією – капітал K.

Для дослідження моделі (7) використаємо достатні умови оптимальності [6, с. 15].

Дослідження економіко-математичної моделі

Для моделі (7) без урахування обмежень нерівностей запишемо достатні умови оптимальності, за якими треба оптимізувати дві функції багатьох змінних

$$R(K,I,C,L,V)\equiv\partial V/\partial t+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu(i)}\partial V/\partial K_i^{(j)}\left[-\mu_i^{(j)}K_i^{(j)}+\alpha_i I\right]-$$
$$-(I+C)\to\max_{I,C,K,L}, \tag{8}$$

$$V\left(T,K(T)\right)\to\min_{K_i^{(j)}(T)\ge\mathrm{K}_{iT}^{(j)}}, \tag{9}$$

де шукана функція V – неперервно-диференційована один раз по t на $[t_0,\mathrm{T}]$ та двічі по $K_i^{(j)}$ на $\left\{K_i^{(j)}\ge 0\right\}$, $j=\overline{1,\nu(i)}$, $i=\overline{1,m}$ та яку будемо шукати у вигляді

$$V_{(t,K)}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu(i)}K_i^{(j)}. \tag{10}$$

Слід зауважити, що вираз (10) взятий із мінусом для того, щоб задача оптимізації (9) мала розв'язок $K_i^{(j)}(\mathrm{T})=K_{iT}^{(j)}$, $j=\overline{1,\nu(i)}$, $i=\overline{1,m}$.

Підставимо (10) у (8), одержимо

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu(i)}\left[-\mu_i^{(j)}K_i^{(j)}+\alpha_i I\right]-(I+C)\to\max_{I,C,K,L}. \tag{11}$$

До критерія мети (11) допишемо обмеження із задачі (7)

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{v_{(i)}} a_{ij}^{(l)} F_j^{(l)}\left(K_j^{(l)}, L_j^{(l)}\right) - \alpha_i\left[I(t)+C(t)\right] = Y_i^{(\text{ПО})}(t),$$

$$0 \le L_i^{(j)}(t),\ C_i(t) \ge C_i^{(\min)},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ K_i^{(j)}(t_0) = K_{i0}^{(j)},$$

$$K_i^{(j)}(\mathrm{T}) \ge \mathrm{K}_{iT}^{(j)},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{v(i)} L_i^{(j)}(t) \le Q,\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

$$j=\overline{1,v(i)},\ i=\overline{1,m}. \qquad (12)$$

Задача (11)–(12) є задачею опуклого програмування, яка за неврахування обмежень $K_i^{(j)}(\mathrm{T}) \ge K_{iT}^{(j)}$, $j=\overline{1,v(i)}$, $i=\overline{1,m}$ за теоремою Куна-Таккера [7, с. 195–199] має розв'язок. А за врахування обмежень $K_i^{(j)}(\mathrm{T}) \ge K_{iT}^{(j)}$, $j=\overline{1,v(i)}$, $i=\overline{1,m}$ задача опуклого програмування (11)–(12) може не мати розв'язку. Це означає, що кінцеві стани $K_{iT}^{(j)}$ є не досяжними. Тому необхідно послабити умови на вхідну інформацію задачі (7).

Нехай задача опуклого програмування (7) має розв'язок. Цей розв'язок буде оптимальними керуваннями: за валовими інвестиціями $\left(I_{\text{ОП}}(t)\right)$, за споживанням $C_{\text{ОП}}(t)$, за живою працею $L_{\text{ОП}}(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$.

Розв'язати задачу опуклого програмування (7) можна одним із числових методів [8].

Тоді змінна частина кінцевого попиту за валовими інвестиціями $I_{\text{ОП}}^{(3M)}(t) = \alpha I_{\text{ОП}}(t)$, а за споживанням – $C_{\text{ОП}}^{(3M)}(t) = \alpha C_{\text{ОП}}(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ будуть оптимальними керуваннями.

Відповідні оптимальні траєкторії за капіталами $K_{\text{ОП}}$ визначаються методом Рунге-Кутта [9] із такої початкової задачі:

$$\dot{K}_i^{(j)}(t) = -\mu_i^{(j)} K_i^{(j)}(t) + \alpha_i I^{(3M)}(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

$$\mathrm{K}_i^{(j)}(t_0) = \mathrm{K}_{i0}^{(j)},\ j=\overline{1,v(i)},\ i=\overline{1,m}.$$

Оптимальні керування за рівнем діяльності обчислюються за формулами

$$X_i^{(j)}{}_{\text{ОП}}(t) = F_i^{(j)}\left(K_i^{(j)}{}_{\text{ОП}}(t), L_i^{(j)}{}_{\text{ОП}}(t)\right),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ j=\overline{1,v(i)},\ i=\overline{1,m},$$

а змінна частина кінцевого попиту –

$$Y_i^{(3M)}{}_{\text{ОП}}(t) = \alpha_i\left[I_{\text{ОП}}(t)+C_{\text{ОП}}(t)\right] \equiv I_{\text{ОП}}^{(3M)}(t) + C_{\text{ОП}}^{(3M)}(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}].$$

Таким чином, одержали оптимальний процес

$$\left\{K_{\text{ОП}}(t), I_{\text{ОП}}^{(3M)}(t), C_{\text{ОП}}^{(3M)}(t), L_{\text{ОП}}(t), X_{\text{ОП}}(t), Y_{\text{ОП}}^{(3M)}(t), t\in[t_0,\mathrm{T}]\right\}.$$

Зауваження 1. Вищеописана методика має місце для критерію мети в умовах удосконаленої конкуренції

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} p_i\alpha_i\left[I_{(t)}+C_{(t)}\right]dt \to \max.$$

2. Вищеописана методика має місце в умовах міжгалузевого інвестування галузей, тобто коли кінцевий попит Y_i подається як

$$Y_i(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}\alpha_j I(t), i=\overline{1,r}, \\ \alpha_i C(t), i=\overline{r+1,m}, \end{cases}$$

де γ_{ij} – коефіцієнти міжгалузевого інвестування галузей, $\sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij}=1$ для всіх $j=\overline{1,m}$, γ_{ij} = *0* для всіх $i=\overline{r+1,m}$, *r* – кількість фондоутворюючих галузей, які інвестують всі галузі $j=\overline{1,m}$, $m-r$ – кількість нефондоутворюючих галузей.

Висновки з проведеного дослідження. Запропоновано та проведено дослідження моделі оптимального розвитку узагальненої динамічної міжгалузевої економіки типу Канторовича за відсутності інвестування між галузями. Показано, що ця модель у математичному плані є задачею оптимального керування, у якій керуваннями виступають валові інвестиції *I*, споживання *C*, робоча сила (жива праця) *L* і рівень діяльності *X*, а фазовою траєкторією – капітал *K*. Вказано, що за врахування обмежень на кінцевий стан капіталу $K_i^{(j)}(\mathrm{T}) \ge K_{iT}^{(j)}$, $j=\overline{1,v(i)}$, $i=\overline{1,m}$ задача опуклого програмування, яка описує оптимальний розвиток узагальненої динамічної міжгалузевої економіки типу Канторовича, може не мати розв'язку. Отже, необхідно послабити умови на вхідну інформацію задачі. У результаті за допомогою числових методів отриманий оптимальний процес для динамічної міжгалузевої економіки типу Канторовича.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Математическая экономика на персональном компютере / М. Кубонива та ін.; под ред. М. Кубонива. Москва : Финансы и статистика, 1991. 304 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Москва : Наука и техника, 1974. 272 с.
3. Григорків В.С., Ярошенко О.І. Моделювання оптимальної кредитної стратегії ріелтера. *Економічна кібернетика*, 2007. № 1–2 (43–44). С.4–9.
4. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов и др.; под ред. В.Ф. Кротова Москва : Высшая школа, 1990. 430 с.
5. Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Моделювання та оптимізація еколого-економічних систем міжгалузевих балансів із інвестиційним запізненнями. Чернівці : Місто, 2013. 212 с.
6. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора. Чернівці: Місто, 2012. 208 с.
7. Математичне програмування / І.М. Богаєнко та ін. Київ : Логос, 1996. 266 с.
8. Акулич И.Л. Математическое програмирование в примерах и задачах. Москва : Высшая школа, 1986. 319 с.
9. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Чернівці: Золоті Литаври, 2005. 396 с.