ПІДКРИТЕРІЇ ПАРЕТІВСЬКОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ ЯК ОДИН З МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ ПІДПРИЄМСТВА

THE SUB-CRITERIA OF PARETO CONVOLUTION CRITERIA AS ONE OF THE ENTERPRISE PRODUCTION PROGRAMME OPTIMIZATION METHODS

УДК 519.8

Червак О.Ю.
к.ф.-м.н., доцент
Ужгородський національний університет

У статті вирішено як з теоретичної, так і з практичної точки зору, важливі проблеми теорії прийняття рішень за багатьма критеріями, зокрема для оптимізації виробничої програми підприємства. При умові попарної рівної важливості багатьох критеріїв запропоновано згортки, відмінні від паретівської, які є підкритеріями останньої, що дозволяє розв'язувати багато важливих задач багатокритеріального вибору, для яких не існує формальних методів розв'язання.

Ключові слова: *задача оптимізації, однокритеріальна задача, багатокритеріальна задача, згортка критеріїв, лексикографічна згортка, паретівська згортка, лексикографічно-паретівська згортка, парето-лексикографічна згортка, надкритерій критерію, підкритерій критерію.*

В работе решено как с теоретической, так и с практической точки зрения, важные проблемы теории принятия решений по многим критериям, в частности для оптимизации производственной программы предприятия. При условии попарно равной важности многих критериев предложено свертки, отличные от паретовской, которые являются подкритериями последней, что позволяет решать многие важные задачи многокритериального выбора, для которых не существует формальных методов решения.

Ключевые слова: *задача оптимизации, однокритериальная задача, многокритериальная задача, свертка критериев, лексикографическая свертка, паретовская свертка, лексикографически-паретовская свертка, парето-лексикографическая свертка, надкритерий критерия, подкритерий критерия.*

The key problems of decision-making theory concerning many criteria, especially for enterprise production optimization programme, were solved with both theoretical and practical points of view. Provided equal importance of many criteria, there were proposed convolutions other than Pareto, which serve as its sub-criteria, and allow solving many important problems of multi-criteria choice, for which there are no formal methods of solution.

Key words: *optimization task, one-criterion task, multi-criteria task, criteria convolution, lexicographical convolution, Pareto convolution, lexicographical-Pareto convolution, Pareto-lexicographical convolution, sub-criterion, super-criterion.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Властивостям і методам розв'язування паретівських багатокритеріальних задач оптимізації присвячено багато наукових праць [1-8], число яких нараховує уже декілька сотень найменувань. Широкий список робіт в цьому напрямку приведено в монографії [8].

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Для впорядкування задач вибору на одній і тій допустимій множині альтернатив введені поняття надкритерію будь-якого критерію; якщо критерій є надкритерієм даного критерію на цій множині, то останній критерій є підкритерієм першого. За умови попарної рівної важливості багатьох критеріїв, запропоновані згортки, відмінні від паретівської, які є підкритеріями останньої (число різних цих підкритеріїв рівне числу заданих критеріїв). Таким чином, показано, що розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською, парето-лексикографічною і лексикографічно-паретівською згортками зводяться до розв'язання задач скалярної або лексикографічної оптимізації.

Постановка завдання. Метою дослідження є розробка нових підходів до побудови економіко-математичної моделі багатокритеріальної оптимізації виробничої програми підприємства і методів знаходження її найкращого рішення.

Метою статті є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю. Для цього, кожна з цих задач формулюється як задача з векторним критерієм, значення якого відповідно впорядковується, тобто на множині альтернатив визначається відповідний порядок віддачі переваги. Якщо цей порядок є повним порядком, то відповідна задача є задачею лексикографічної оптимізації, яка розв'язується відомими методами. Якщо порядок віддачі переваги є частковим порядком, то відповідна задача розв'язується шляхом заміни її однією або багатьма задачами, порядок віддачі переваги в яких є повним порядком на множині альтернатив, отже, кожна з них є або задачею лексикографічної оптимізації, або задачею скалярної оптимізації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Формування плану виробництва і реалізації продукції (робіт, послуг) будь-якого підприємства представляє собою складну оптимізаційну задачу прийняття рішень в умовах невизначеності. Завдання оптимізації виробничої програми підприємства передбачає наявність однієї цільової функції, яка зазвичай представляє собою однокритеріальну задачу максимізації прибутку при заданих обмеженнях на величину виробничих ресурсів і, яка має єдине рішення на основі теорії лінійного програмування.

Однак, однокритеріальна задача оптимізації виробничої програми в останні роки розглядається як частинна задача оптимізації, що не завжди відповідає багатоцільовій спрямованості діяльності будь-якого суб'єкта господарювання. Як відомо, цілі промислового підприємства об'єктивно дуже різноманітні: як мінімум, можна виділити дві їх групи:економічні і неекономічні. Тому, підприємство не може бути зосереджено безпосередньо лише на єдиній меті, а повинно визначити декілька найбільш значних орієнтирів дій.

Сьогодні більшість зарубіжних і вітчизняних дослідників вважають, що в реальних економічних умовах на роль критеріїв оптимальності одночасно претендують декілька десятків показників, наприклад, максимум чистого доходу від реалізації виробленої продукції, максимум рівня рентабельності, мінімум собівартості випуску, мінімум витрат дефіцитних ресурсів тощо. Тобто задача оптимізації виробничої програми підприємства стає багатокритеріальною.

Нехай, у задачі розробки плану на допустимій множині X виробництва підприємства обрано критерії:

$$C_j,\ j = 1, 2, \ldots, k, \qquad (1)$$

за умовою їх попарної рівної важливості при оцінці альтернатив. Альтернатива $\mathbf{x}_*(P) \in X$ вважається оптимальною в паретівській згортці цих критеріїв, якщо і тільки якщо не існує така допустима альтернатива $\mathbf{x} \in X$, яка була б *негіршою* за $x_*(P)$ за кожним з критеріїв (1) і *кращою* за неї хоча б за одним з цих критеріїв.

В умовах попарної рівної важливості критеріїв (1) можуть бути й інші оптимальності альтернатив, відмінні від оптимальності в паретівській згортці. Будемо позначати паретівську згортку критеріїв (1) через P_1 $(P \equiv P_1)$, а відповідну оптимальну альтернативу через $\mathbf{x}_*(P_1)$. Тут ми будемо розглядати згортки, які позначатимемо через $P_2, P_3, \ldots, P_s, \ldots, P_k$; відповідні оптимальні альтернативи позначатимемо: $\mathbf{x}_*(P_2)$, $\mathbf{x}_*(P_3), \ldots, \mathbf{x}_*(P_s), \ldots, \mathbf{x}_*(P_k)$. В кожній з цих згорток, як і в згортці P_1, альтернативи $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in x$ будемо вважати *рівноцінними*, якщо і тільки якщо вони *рівноцінні* за кожним з критеріїв (1), тобто, якщо вони *рівноцінні* і в згортці P_1. Множину оптимальних альтернатив в згортці P_s позначатимемо через $x_*(P_s)$. Отже, розглядувані згортки відрізнятимуться одна від одної тільки правилами віддачі переваги. Так, альтернатива $\mathbf{x}$ вважається *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$ в згортці P_2, якщо і тільки якщо $\mathbf{x}$ *негірша* за $\mathbf{y}$ за кожним з критеріїв (1) і є *кращою* за неї хоча б за двома з цих критеріїв. Отже, альтернатива $\mathbf{x}_*(P_2) \in X$ є оптимальною в цій згортці, якщо і тільки якщо не існує допустима альтернатива $\mathbf{x} \in X$, яка була б *негіршою* за $\mathbf{x}_*(P_2)$ за критеріями (1), але була б *кращою* за неї хоча б за двома з цих критеріїв.

Означення 1. Критерій χ_2 назвемо надкритерієм критерію χ_1, якщо і тільки якщо для $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, таких, що $\mathbf{x}$ *краща* за $\mathbf{y}$ за критерієм χ_1, випливає, що $\mathbf{x}$ *краща* за $\mathbf{y}$ за критерієм χ_2. Критерій χ_1 назвемо підкритерієм критерію χ_2, якщо критерій χ_2 є надкритерієм критерію χ_1.

Означення 2. Альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$ в згортці P_s $(1 \le s \le k)$, якщо і тільки якщо $c_j(\mathbf{x}) \ge c_j(\mathbf{y})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, і існують номери $t_1, t_2, \ldots, t_s$ $(1 \le t_1, t_2, \ldots, t_s \le k)$, такі, що виконуються строгі нерівності $ct_1(\mathbf{x}) > ct_1(\mathbf{y})$, $ct_2(\mathbf{x}) > ct_2(\mathbf{y})$, …, $ct_s(\mathbf{x}) > ct_s(\mathbf{y})$, тобто альтернатива $\mathbf{x}$ *негірша* за альтернативу $\mathbf{y}$ в кожному з порядків (1) і *краща* за неї хоча б в порядках.

Теорема 1. Нехай s_1, s_2 $(1 \le s_1, s_2 \le k)$ будь-які номери. Якщо $s_2 > s_1$, то критерій χ_2, який визначає згортку Ps_2, є підкритерієм на X критерію χ_1, який визначає згортку Ps_1, отже, критерій χ_1 є надкритерієм критерію χ_2.

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що критерій χ_1 є надкритерієм критерію χ_2 на X. Нехай альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$ за критерієм χ_2, тобто альтернатива $\mathbf{x}$ є *негіршою* за альтернативу $\mathbf{y}$ за всіма критеріями (1) і *кращою* хоча б за s_2 критеріями з них. Тоді, очевидно, вона є *кращою* і за s_1 критеріями, так як $s_1 > s_2$. Отже, альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$ і за критерієм χ_1, або, інакше, критерій χ_2 є підкритерієм критерію χ_1, а критерій χ_1 є надкритерієм критерію χ_2.

З теореми 1 випливає, що згортки P_i, $i = 2, 3, \ldots, k$ є підкритеріями паретівської згортки критеріїв (1). Отже, кожна альтернатива, оптимальна в кожній з цих згорток є й оптимальною альтернативою в паретівській згортці. Якщо $\mathbf{x}_*(Ps_1)$ є оптимальною альтернативою в згортці Ps_1, то вона є оптимальною альтернативою і в згортці Ps_2 на X, якщо $s_1 < s_2$.

Критерій лексикографічної згортки L критеріїв (1) є надкритерієм їх парето-лексикографічної згортки PL, отже, $X_*(L) \subset x_*(PL)$. Критерій парето-лексикографічної згортки PL критеріїв (1) є надкритерієм їх паретівської згортки P, отже, $X_*(PL) \subset x_*(P)$. Критерій паретівської згортки P критеріїв (1) $(P \equiv P_1)$, є надкритерієм їх згортки P_2, отже, $X_*(P_1) \subset x_*(P_2)$. Критерій згортки P_2 критеріїв (1) є надкритерієм їх згортки P_3, отже, $X_*(P_2) \subset x_*(P_3)$, і т. д. Критерій згортки P_{k-1} критеріїв (1) є надкритерієм їх згортки P_k, отже, $X_*(P_{k-1}) \subset x_*(P_k)$. Таким чином, мають місце для множин альтернатив, оптимальних на X в згортках критеріїв (1), відповідно $l, PL, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$, такі умови включення:

$$X_*(L) \subset x_*(PL) \subset X_*(P_1) \subset x_*(P_2) \subset \ldots \subset X_*(P_{k-1}) \subset x_*(P_k). \qquad (2)$$

Таким чином, з відношень (2) випливає, що альтернатива $\mathbf{x}_*(L)$, оптимальна в лексикографічній згортці критеріїв (1) є оптимальною альтернативою на X і в кожній іншій з перерахованих згорток цих критеріїв. Тому, якщо ставиться задача відшукання однієї (будь-якої) альтернативи, оптимальної в будь-якій з цих згорток, то достатно розв'язати задачу лексикографічної максимізації векторної функції c($\mathbf{x}$) = ($c_1(\mathbf{x})$, $c_2(\mathbf{x})$, ..., $c_k(\mathbf{x})$) на X; оптимальний розв'язок цієї задачі і буде шуканою оптимальною альтернативою в цій згортці.

В зв'язку з цим методи лексикографічної оптимізації мають важливе значення. Загальновідомою є схема розв'язання задач лексикографічної оптимізації, яка базується на методах скалярної (однокритеріальної) оптимізації. Ефективність цієї схеми визначається ефективністю методів однокритеріальної оптимізації. Для лінійних лексикографічних задач багатокритеріальної оптимізації існує варіант симплексного методу як методу лексикографічної максимізації лінійної векторної функції на опуклій багатогранній множині $X \subset R^n$, заданої системою лінійних обмежень. Але, зазначимо, що альтернативу, оптимальну в тій чи іншій з наведених згорток можна віднайти, розв'язуючи й інші задачі, лексикографічної або скалярної оптимізації. Так, відшукання альтернативи $\mathbf{x}_*$ (*PL*), оптимальної в парето-лексикографічній згортці *PL*, може бути зведене до задачі лексикографічної максимізації на векторної функції $\tilde{c}(\mathbf{x})$, розмірності r (r < k). Відшукання ж альтернативи $\mathbf{x}_*(P)$ може бути зведене до розв'язання однокритеріальної задачі максимізації на X.

Розглянемо згортку P_s ($1 \le s \le k$), критеріїв (1). Так як паретівська згортка P цих критеріїв є надкритерієм згортки P_s, то альтернатива $\mathbf{x}_*(P) \in X$ оптимальна в паретівській згортці, є й оптимальною альтернативою в згортці P_s. Але, множина $X_*(P) \subset X$ альтернатив, оптимальних на X в паретівській згортці P, є тільки підмножиною множини $X_*(P_s)$ альтернатив, оптимальних на X в згортці P_s. Тому, в загальному, множина $X_*(P)$ не повністю покриває множину $X_*(P_s)$, отже, існують альтернативи, оптимальні в згортці P_s, які не належать множині $X_*(P)$.

Розглянемо будь-яку невід'ємну лінійну комбінацію критеріїв (1):

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i(\mathbf{x}) \,. \quad (3)$$

Теорема 2. Якщо серед невід'ємних коефіцієнтів α_i, *i = 1, 2, ..., k,* лінійної комбінації (3) є небільше, ніж нульових коефіцієнтів, то точка $\mathbf{x}_* \in X$ максимума функції (3) є оптимальною альтернативою на X в згортці критеріїв P_s (1).

Доведення. Припустимо супротивне, тобто, що $\mathbf{x}_*$ не є оптимальною альтернативою на X в згортці P_s. Тоді, існує альтернатива $\mathbf{y} \in X$, яка *краща* за $\mathbf{x}_*$ на X в згортці P_s. За означенням згортки P_s, це значить, що $\mathbf{y}$ *краща* за $\mathbf{x}_*$ хоча б за s критеріями, але *негірша* за іншими з критеріїв (1). Отже, виконуються нерівності

$$c_i(\mathbf{y}) \ge c_i(\mathbf{x}_*),\ i = 1, 2, ..., k, \quad (4)$$

серед яких хоча б s нерівностей виконуються як строгі нерівності, тобто існують номери $i_1, i_2, ..., i_s$, такі, що виконуються строгі нерівності

$$c_{i_j}(\mathbf{y}) > c_{i_j}(\mathbf{x}_*),\ j = 1, 2, ..., s. \quad (5)$$

Так як серед невід'ємних коефіцієнтів α_i, *i = 1, 2, ..., k,* є небільше ніж $s-1$ нульових коефіцієнтів, то існує номер r ($1 \le r \le s$) такий, що виконується строга нерівність

$$\alpha_{i_r} > 0. \quad (6)$$

Тоді, за умовою невід'ємності α_i, *i = 1, 2, ..., k,* і за нерівностями (4) виконується нерівність

$$l(\mathbf{y}) - l(\mathbf{x}_*) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (c_i(\mathbf{y}) - c_i(\mathbf{x}_*)) \ge 0, \quad (7)$$

звідки, за умовою (5), виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (c_i(\mathbf{y}) - c_i(\mathbf{x}_*)) \ge \sum_{j=1}^{s} \alpha_{i_j} (c_{i_j}(\mathbf{y}) - c_{i_j}(\mathbf{x}_*)), \quad (8)$$

звідки, за умовою (6), виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{i_j} (c_{i_j}(\mathbf{y}) - c_{i_j}(\mathbf{x}_*)) \ge \alpha_{i_r} (c_{i_r}(\mathbf{y}) - c_{i_r}(\mathbf{x}_*)), \quad (9)$$

звідки, за умовами (5) і (6) виконується строга нерівність

$$\alpha_{i_r} (c_{i_r}(\mathbf{y}) - c_{i_r}(\mathbf{x}_*)) > 0. \quad (10)$$

Отже, з нерівностей (7) – (10) випливає нерівність $l(\mathbf{y}) - l(\mathbf{x}_*) > 0$, або $l(\mathbf{y}) - l(\mathbf{x}_*)$, тобто $\mathbf{x}_*$ не є точкою максимума функції (3) на X. Одержано протиріччя.

Теорема 2 дає можливість для будь-якого s ($1 \le s \le k$) знаходити альтернативи, оптимальні на X в згортці P_s шляхом розв'язання задачі максимізації функції $l(\mathbf{x})$, визначеною будь-яким набором невід'ємних коефіцієнтів α_i, *i = 1, 2, ..., k,* серед яких є небільше, ніж $s - 1$ нульовий коефіцієнт. Різні такі набори, в загальному, дають можливість знаходити й різні альтернативи, оптимальні на X в згортці P_s. Зазначимо, якщо $s = 1$, то маємо паретівську згортку P критеріїв (1). Тому, в подальшому, вважатимемо, що $s \ge 1$.

Припустимо, що функція (3) визначена будь-яким набором додатних коефіцієнтів α_i, *i = 1, 2, ..., k*. Розглянемо функцію:

$$p(\mathbf{x}, \beta) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i c_i(\mathbf{x}), \quad (11)$$

де змінні коефіцієнти β_i, *i = 1, 2, ..., k* можуть приймати тільки одне з двох значень, 0 або 1:

$$\beta_i \in \{0;1\},\ i = 1,2,...k\ ; \quad (12)$$

і розглянемо задачу

$$max\ \ p(\mathbf{x}, \beta) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i c_i(\mathbf{x}), \quad (13)$$

при умовах

$$\mathbf{x} \in X, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \ge k - (s-1), \quad (15)$$

$$\beta_i \in \{0;1\},\ i = 1,2,...k. \quad (16)$$

Зазначимо, що оптимальним розв'язком цієї задачі є деяка альтернатива $\mathbf{x}_* \in X$ і набір значень β_{i*}, $i = 1, 2, ..., k$. Так як, за умовою (16), невідомі β_1 можуть приймати значення тільки 0 або 1 і вони повинні задовольняти нерівності (15), то в цьому оптимальному розв'язку задачі (13)–(16) серед значень цих коефіцієнтів є небільше, ніж $s - 1$ нульових коефіцієнтів. Отже, функція $p(\mathbf{x}, \beta_*) = \sum_{i=1}^{k} \beta_{i*}\alpha_i c_i(\mathbf{x})$ у визначенні має небільше, ніж $s - 1$ нульових коефіцієнтів β_{i*}. Таким чином, оптимальний розв'язок задачі (13) – (16) визначає, за теоремою 2, альтернативу $\mathbf{x}_*$, оптимальну в згортці P_s. Так як кожна з дискретних змінних β_i цієї задачі є булевою змінною, то цю задачу не важко розв'язувати методом гілок і границь. Розв'язуючи цю задачу, при різних додатних наборах коефіцієнтів α_i, $i = 1, 2, ..., k,$ при фіксованому s $(1 \le s \le k)$ одержуємо, в загальному, різні альтернативи, оптимальні на X в згортці P_s.

Важливе значення має можливість перевірити, чи допустима альтернатива $\mathbf{y} \in X$ є оптимальною альтернативою в згортці P_s $(1 \le s \le k)$, і якщо вона є неоптимальною в цій згортці, то мати можливість її покращити.

Нехай $\mathbf{y} \in X$ будь-яка допустима альтернатива. Розглянемо задачу:

$$\max\ q(\mathbf{x}, \beta) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i c_i(\mathbf{x}), \qquad (17)$$

при умовах

$$\mathbf{x} \in X, \qquad (18)$$

$$c_i(\mathbf{x}) \ge c_i(\mathbf{y}), i = 1,2,...,k, \qquad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \ge k - (s-1),\ 1 \le s \le k, \qquad (20)$$

$$\beta_i \in \{0;1\}, i = 1,2,...k. \qquad (21)$$

Теорема 3. Якщо $\mathbf{x}_*$ оптимальна альтернатива в задачі максимізації (17) –(21), то вона є оптимальною альтернативою на X і в згортці P_s.

Доведення. Нехай $\mathbf{x}_*$ і β_{i*}, $i = 1, 2, ..., k$, складають оптимальний розв'язок задачі (17) – (21). Припустимо супротивне, тобто, що $\mathbf{x}_*$ не є оптимальною альтернативою на X в згортці P_s. Тоді, існує альтернатива $\mathbf{z} \in X$, яка *краща* за $\mathbf{x}_*$ в згортці P_s. Це означає, що виконуються нерівності

$$c_i(\mathbf{z}) \ge c_i(\mathbf{x}_*), i = 1,2,...,k, \qquad (22)$$

серед яких хоча б s нерівностей виконуються як строгі нерівності, тобто існуть номери $i_1, i_2, ..., i_s$, такі, що виконуються строгі нерівності

$$c_{i_j}(\mathbf{z}) > c_{i_j}(\mathbf{x}_*), j = 1,2,...,s. \qquad (23)$$

Так як $\mathbf{x}_*$ належить X, то, за умовами (19), виконуються нерівності

$$c_i(\mathbf{x}_*) \ge c_i(\mathbf{y}), i = 1,2,...,k. \qquad (24)$$

За припущенням (22), виконуються й нерівності

$$c_i(\mathbf{z}) \ge c_i(\mathbf{y}), i = 1,2,...,k, \qquad (25)$$

тобто $\mathbf{z}$ є допустимою альтернативою і в розглядуваній задачі. За умовами (21) і (22) виконується нерівність

$$q(\mathbf{z}, \beta_{i*}) - q(\mathbf{x}_*, \beta_{i*}) = \sum_{i=1}^{k} \beta_{i*}(c_i(\mathbf{z}) - c_i(\mathbf{x}_*)) \ge 0, \qquad (26)$$

звідки, за умовами (23), виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_{i*}(c_i(\mathbf{z}) - c_i(\mathbf{x}_*)) \ge \sum_{j=1}^{s} \beta_{i_j*}(c_{i_j}(\mathbf{z}) - c_{i_j}(\mathbf{x}_*)), \qquad (27)$$

звідки, за умовою (20), існує r $(1 \le r \le s)$, таке, що $\beta_{i_r*} = 1$, тобто виконується строга нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_{i*}(c_i(\mathbf{z}) - c_i(\mathbf{x}_*)) \ge \sum_{j=1}^{s} \beta_{i_j*}(c_{i_j}(\mathbf{z}) - c_{i_j}(\mathbf{x}_*)). \qquad (28)$$

Таким чином, з нерівностей (27) – (28) випливає строга нерівність

$q(\mathbf{z}, \beta_{i^*}) - q(\mathbf{x}_*, \beta_{i^*}) > 0$, або $q(\mathbf{z}, \beta_{i^*}) > q(\mathbf{x}_*, \beta_{i^*})$.

Одержано протиріччя, так як $\mathbf{x}_*$ і β_{i^*} не складають оптимального розв'язку розглядуваної задачі (17) – (21) і теорема доведена.

З теореми 3 випливає, що $\mathbf{y} \in X$ є оптимальною альтернативою на X в згортці P_s, якщо і тільки якщо $q(\mathbf{y}, \beta_{i^*}) - q(\mathbf{x}_*, \beta_{i^*})$.

Зазначимо, що дискретну однокритеріальну задачу (17) – (21) не важко розв'язати за допомогою методу гілок і границь.

Повернемось знову до задачі (13) – (16). За допомогою цієї дискретної задачі знаходяться альтернативи, оптимальні в згортці P_s, які відповідають оптимальним значенням β_{i*}, $i = 1, 2, ..., k$. Але, обмеженням (15) і (16) задовольняють й інші набори значень цих коефіцієнтів; число цих наборів скінченне і легко може бути перебране. Нехай β_{i*}, $i = 1, 2, ..., k$, – будь-які з цих наборів, які задовольняють цим обмеженням. Тоді, функція

$$p(\mathbf{x}, \beta') = \sum_{i=1}^{k} \beta_i' \alpha_i c_i(\mathbf{x}). \qquad (29)$$

є такою, що серед її коефіцієнтів β_i, α_i, $i = 1, 2, ..., k$ є небільше, ніж $s - 1$ нульових коефіцієнтів. Отже, за теоремою 2, оптимальний розв'язок задачі максимізації функції (29) на допустимій множині X є альтернативою, оптимальною на X в згортці P_s. Множину оптимальних розв'язків цієї задачі позначимо $X_*(\beta')$. Множину (скінченну) наборів значень змінних коефіцієнтів β_i, $i = 1, 2, ..., k$, які задовольняють обмеженням (15) і (16) позначимо через B. Таким чином, розв'язавши задачу максимізації функції (29) на X для кожного набору цієї множини, одержимо й різні альтернативи, оптимальні в згортці P_s. Множина всіх допустимих альтернатив, кожна з яких є оптимальним розв'язком хоча б однієї з цих задач, є об'єднанням множин $X_*(\beta')$, $\beta' \in B$. Зазначимо, що перебір наборів β' в множині B можна здійснити, наприклад, в лексикографічному порядку. Тоді, очевидно, що дискретна задача (13) – (16) дає можливість знаходити тільки одну з цих множин $X_*(\beta_*)$.

Висновки з проведеного дослідження. В статті побудовані нові моделі і запропоновані методи розв'язання задач, до яких зводиться аналіз цих моделей. Вони, в сукупності, вирішують як з теоретичної, так і з практичної точки зору, важливі прблеми багатокритеріального вибору, або, інакше, важливі проблеми теорії прийняття рішень за багатьма критеріями. Результати роботи дають можливість формалізувати процеси прийняття рішень в умовах, коли альтернативи оцінюються за багатьма критеріями, будь-яка пара з яких або є рівноважливою, або є різноважливою при оцінці альтернатив. Для впорядкування задач вибору на одній і тій допустимій множині альтернатив введені поняття надкритерію будь-якого критерію; якщо критерій є надкритерієм даного критерію на цій множині, то останній критерій є підкритерієм першого. Показано, що розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською, парето-лексикографічною і лексикографічно-паретівською згортками зводяться до розв'язання задач скалярної або лексикографічної оптимізації. За умови попарної рівної важливості багатьох критеріїв, запропоновані згортки, відмінні від паретівської, які є підкритеріями останньої (число різних цих підкритеріїв рівне числу заданих критеріїв).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. – 311 с.

2. Червак Ю.Ю. Лексикографический поиск решений задач дискретного программирования: текст лекцій. – Ужгород, из-во Ужгородского университета, 1977. – 43 с.

3. Червак Ю.Ю., Червак О.Ю. Один из способов формулирования парето-лексикографических задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 108-111 с.

4. Червак Ю.Ю. Парето-лексикографическая оптимизация // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: АН Украины, Ин-т математики, 1993. – С. 538-546.

5. Охріменко М.Г., Дзюбан І.Ю. Дослідження операцій. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 184 с.

6. Сергиенко И. В., Перепелица В.А. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах. // Кибернетика. – 1987. – № 5. – С. 85-93.

7. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев, Наукова думка, 1988. – 380 с.

8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254 с.